

# MESURE DE LA MASSE DE LA TERRE

*Pour déterminer la masse de la Terre, inutile d'essayer de la faire monter sur une balance, mais on peut la déterminer à l'aide des lois de NEWTON et des lois de KEPLER.*

## A NEWTON (1642 -1722) et la gravitation

a- Newton montre que :

- La force exercée par la Terre de masse  $M_t$  sur un objet de masse  $m$  posé à sa surface est
- Proportionnel à  $M_t$  et à  $m$
- Inversement proportionnel au carré de la distance  $d$  entre les centres des 2 objets
- Le coefficient de proportionnalité est appelé  $G$  constante de gravitation universelle

b- Questions

- 1- Quelle est la distance entre les 2 centres ?
- 2- Quelle est la bonne expression de cette force  $F$

$$F = G \times M_t \times m \times R_t^{-2} \quad F = G \times \frac{M_t \times m}{R_t^2}$$

$$F = G \times \frac{R_t^2}{M_t \times m} \quad F = G \times \left( \frac{M_t \times m}{R_t} \right)^2$$

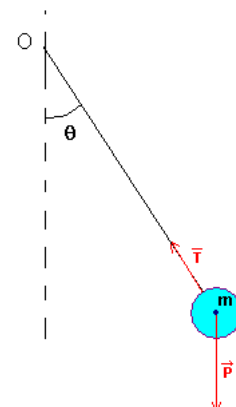
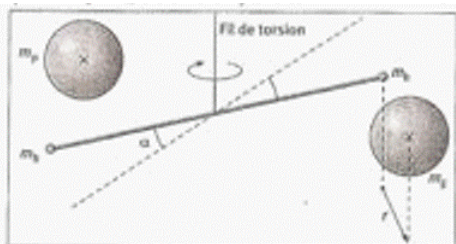
- 3- Cette force  $F$  est-elle assimilable au poids  $P$  d'un objet. Rappeler comment on calcule le poids  $P$  d'un objet
- 4- En déduire que l'expression de la masse de la Terre est

$$M_t = g \times \frac{R_t^2}{G}$$

c- Conclusion

Pour mesurer la masse de la Terre, il faut donc déterminer **le rayon de la Terre  $R_t$** , la valeur de **l'accélération de la pesanteur  $g$**  à la surface de la Terre et déterminer la **constante de gravitation universelle  $G$**

Si on est suffisamment astucieux, on peut y arriver avec un bâton, des boules métalliques, une ficelle, un fil de fer, un chronomètre.



# Rt

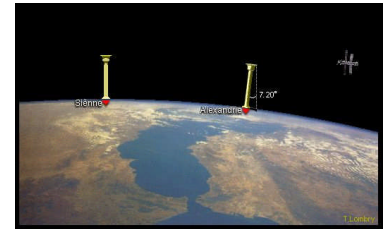
# Ερατοσθένης

le rayon de la TERRE



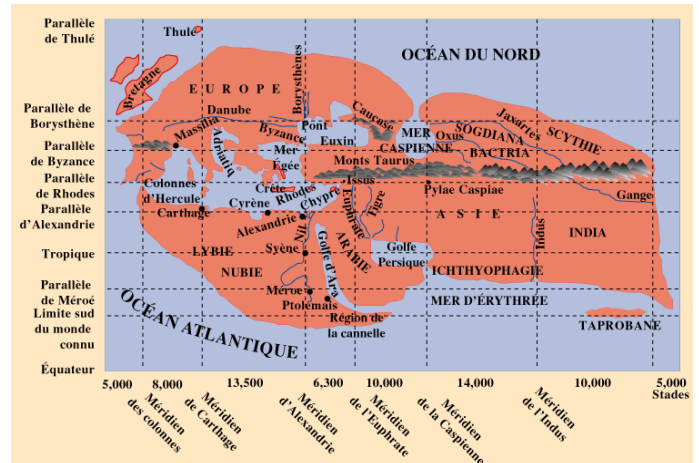
## Comment déterminer la taille de la Terre ?

Non, la Terre n'est pas plate ! Deux siècles avant notre ère, Eratosthène remarqua que le 21 juin l'ombre du Soleil à Alexandrie et à Siène faisait un écart de  $7.20^\circ$ . Cet écart ne pouvait s'expliquer que par la courbure de la Terre. Cet écart représentait 5000 stades qui, reportés sur toute la circonférence représentait 252000 stades, soit environ 39751 km (comparée à la valeur moderne de 40075 km) ! Mais il faudra attendre 1700 ans pour que sa théorie soit prise au sérieux par Copernic.



On lui attribue le terme géographie. Il laissa une carte générale de l'écoumène qui fut longtemps l'unique base de la géographie : il y donnait la valeur de  $47^\circ 42'$  à l'arc du méridien compris entre les deux tropiques ; vingt siècles après lui, l'Académie française des sciences retrouvait à peu près la même mesure ( $47^\circ 40'$ ).

Eratosthène était directeur de la bibliothèque d'Alexandrie pensée par Alexandre le Grand et construite par Ptolémée vers -290. Cette bibliothèque rassemblait 700000 ouvrages et finit par être brûlée complètement 980 ans plus tard par les chrétiens puis les musulmans

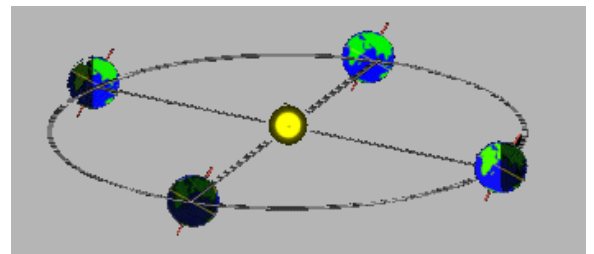


## A OBSERVATIONS

Ouvrir l'animation erathosthene . swf

La Terre est inclinée sur son orbite de  $23.5^\circ$  ce qui est la cause des saisons car l'inclinaison des rayons solaires varie selon les saisons.

- a- En utilisant l'animation des rayons solaires, et en faisant défiler les mois compléter les phrases suivantes :
- Les deux tropiques .....les zones de la Terre où l'on peut observer le Soleil au zénith(à la verticale) à midi
  - Le Soleil est au zénith sur le tropique du Cancer ..... fois par an le .....
  - On .....observer le Soleil au zénith à Alexandrie .

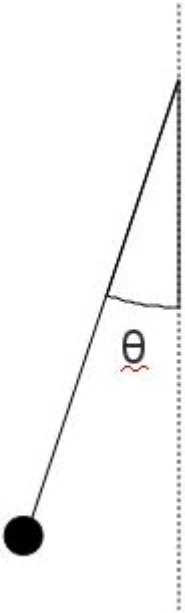


b- Vérifier l'observation d'Ερατοσθένης sur les ombres des objets à Alexandrie et à Syène.

## B CALCULS

- a- D'après le texte de l'animation, l'ombre d'une obélisque de 2.50m fait 31 cm à Alexandrie. Faire un schéma (sans idée d'échelle) et retrouver par un calcul la valeur de l'angle indiqué au début de ce texte.





# g

## MESURE DE g

**Un pendule simple est constitué d'une masse m accroché à un fil inextensible. L'ensemble peut osciller autour de sa position d'équilibre de façon périodique. Ce système est en fait l'ancêtre du chronomètre. Il va aussi permettre de déterminer la valeur de g : accélération de la pesanteur à la surface de la Terre.**

### A Détermination de g par des mesures manuelles

#### 1- La période d'oscillation : de quoi peut-elle dépendre ?

Réflexion :

- a- Comment déterminer avec précision la période d'oscillation d'un pendule ?
- b- Quelles sont les 3 grandeurs physiques mesurables qui pourraient éventuellement influencer sur la valeur de la période T des oscillations du pendule ?

Vérification :

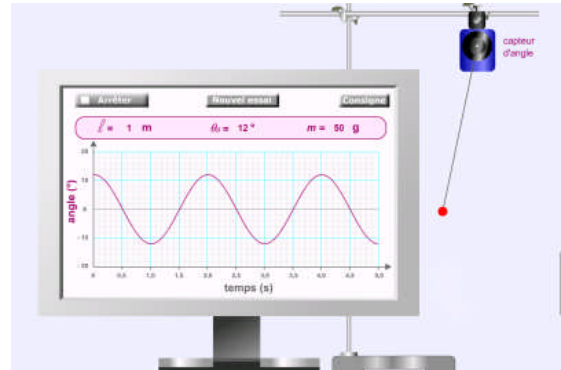
- a- Faire varier successivement les 3 grandeurs physique pouvant éventuellement avoir une influence sur la période et conclure de leur influence ou non sur la période T
- b- Pour vérifier vos mesures, utiliser la simulation suivante (p:/logiciels reseau/phy/mpi/masse\_terre/g/pendule\_simple.swf ) puis conclure

Mesures

Faire un tableau de mesure de T au chronomètre pour différentes longueurs du fil

Exploitation

- a- Tracer  $T = f(l)$  dans Excel. Trouver la courbe de tendance qui correspond le mieux aux mesures. Relever cette équation en remplaçant les y et x donnés par Excel par les vrais noms de variables.
- b- Dédire de cette équation que  $T^2 = f(l)$  doit être une droite. Puis tracer ce graphe pour vérifier.



#### 2- Influence de g

Reflexion

Si g était égal à 0 m/s<sup>2</sup>, quelles serait les forces appliquées à la boule quand on l'abandonne sans vitesse initiale ? Quel serait donc son mouvement ? Conclusion : g doit-il avoir une influence sur la période T du pendule ?

mesure

Comme il est difficile de changer de planète, on utilise une simulation pour faire varier g et vérifier (p:/logiciels reseau/phy/mpi/masse\_terre/g/upend.htm ). On gardera l=1m

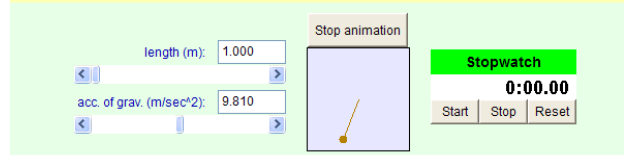
Exploitation

Faire le même genre de travail que pour  $T=f(l)$  avec  $T = f(g)$ .

#### 3- CONCLUSION

- a- T dépend-t-elle de  $\frac{l}{g}$  ou de  $\sqrt{\frac{l}{g}}$  ?

#### The Undamped and Undriven Pendulum

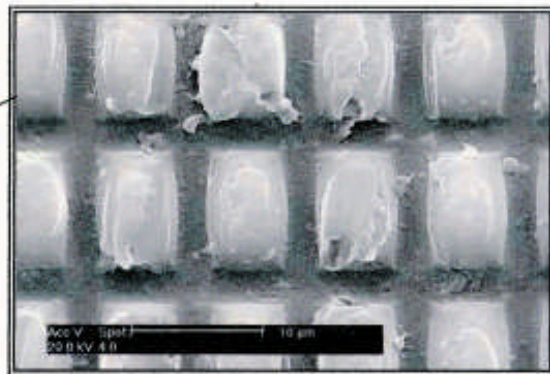
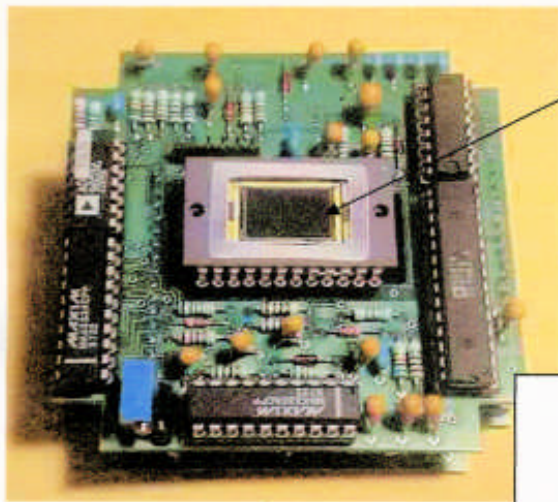


- b- Montrer que le rapport  $\sqrt{\frac{l}{g}}$  est homogène à une durée.
- c- Vérifier que la constante est assimilable à  $2\pi$ .
- d- Donner l'expression de la formule donnant T en fonction de g et de l
- e- En déduire l'expression de g puis trouver la valeur de g à la surface de la Terre déterminée avec 3 chiffres significatifs. Comparer votre résultat avec la valeur  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

## B- Détermination de g par acquisition video

### 1- Les capteurs CCD

Dans les années soixante, la NASA envoyait des sondes dans l'espace. Mais ces sondes ne pouvaient pas envoyer de photos, le mode analogique ne pouvant pas être transmis. Afin de bénéficier des services que peuvent apporter les sondes, ils décidèrent de trouver un mode pouvant être transmis de la sonde à la base terrestre. Ils inventèrent donc un capteur permettant de numériser les photographies prises par la sonde. Le **CCD (Charge Coupled Device)** est le plus simple à fabriquer. Mis au point par les Laboratoires Bell en 1969 il a rapidement été adopté pour des applications de pointe (imagerie astronomique) puis popularisé sur les caméras et appareils photo.



#### CAPTEUR CCD

Composée de plusieurs millions de cellules photosensibles (photosites) et gravée de microcircuits électroniques, le tout disposé sur une minuscule plaque de silicium (de la grosseur environ d'une pièce de 1 euros). Ces photosites ont reçu un traitement pour les rendre sensibles à la lumière et vont réagir proportionnellement à cette dernière.

Un capteur CCD est un alignement de cellules sensibles à la lumière

- **La conversion des ondes lumineuses en charges électriques**

Le capteur CCD est frappé par un **photon** (onde lumineuse). Si l'énergie déployée par ce photon est suffisante, la matière **semi-conductrice** qui compose le capteur (le silicium Si) réagit avec celui-ci de manière proportionnelle à la longueur d'onde de ce photon.

La couche de silicium a donc transformé le photon en une charge électrique (accumulation d'électrons) qui varie en fonction de la couleur.

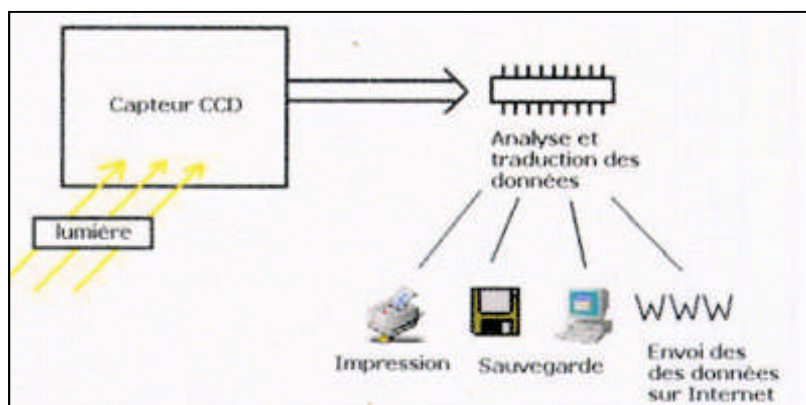
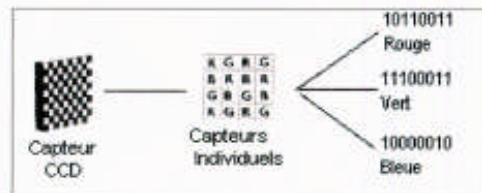
Le signal analogique est donc transformé en charge électrique.

- **Accumulation de ces charges**

Sur chaque pixel, les électrons s'accumulent, et, après le **temps d'intégration**, on compte les électrons présents sur chacun des pixels. Cette charge a été mesurée, le signal est donc devenu numérique.

- **Transfert et interprétation des charges électriques**

Ces informations (nombre d'électrons) sont envoyées aux différentes puces qui composent le circuit imprimé de l'appareil photo ou de la caméra numérique, et enfin ils sont traduits, par calcul, en coordonnées RVB : nous obtenons bien notre donnée numérique finale.



### Questions :

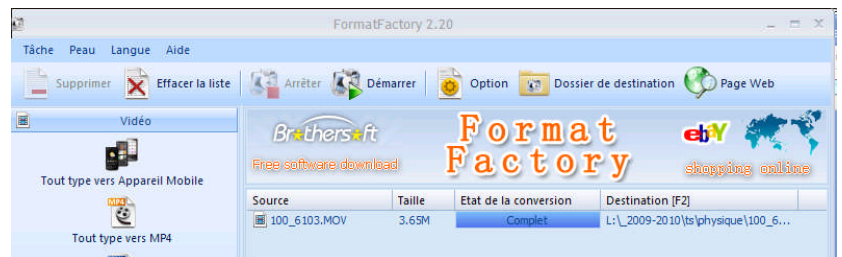
- 1- Comment s'appelle en français un capteur CCD ? est-ce un capteur passif ou actif ?
- 2- Quel est le rôle d'un capteur ccd : Conversion analogique numérique ou conversion numérique analogique ? Est-ce un transducteur optoélectronique ? Quelle transformation effectue-t-il ?
- 3- De quoi est constitué un capteur CCD. L'APN utilisé pourra produire des images à 5Mpx. Que signifie le mot pixel ? Combien de cellules photosensible possède cet APN ? D'après une des photos, quelle est la taille d'une cellule ?
- 4- Quel est le rôle du circuit électronique situé après la cellule CCD ?
- 5- La taille d'une photo réalisée par cet APN peut aller jusqu'à 2576 x 1932. Cela correspond à combien de pixel ?

## 2- Les logiciels utilisés

### a- Le logiciel de conversion de format video

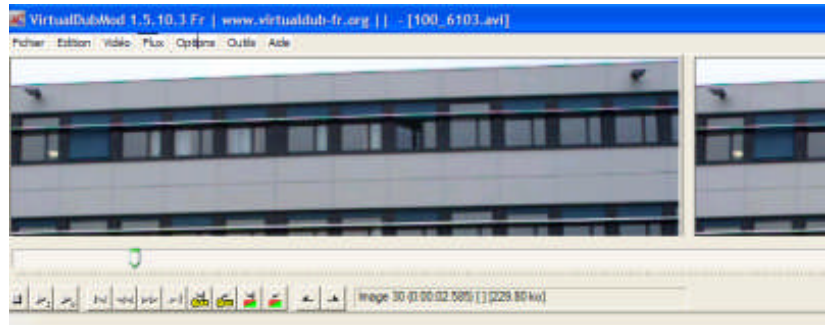
L'APN réalise des photos au format .mov. Il va falloir convertir cette vidéo au format .avi pour l'utiliser.

On utilisera le logiciel **FORMAT FACTORY**



### b- Le logiciel de traitement video

Pour effectuer des coupures, enlever la piste sonore qui sera inutile ici, ou encore changer de codec video On utilisera le logiciel **Virtual Dub**



### c- Le logiciel de pointage

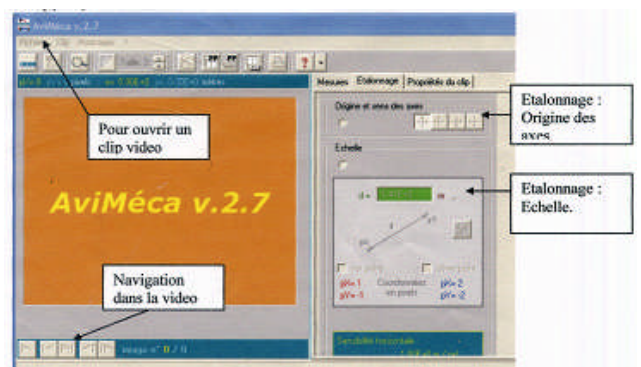
Le logiciel **AVIMECA** permettra d'étudier image par image le mouvement du pendule et d'exporter les mesures dans Excel

## 3- Réalisation de la séquence vidéo

- o Mesurer avec précision la longueur l du pendule
- o Réaliser la séquence video en veillant que l'APN soit stable et que la verticale du lieu soit la même sur la séquence
- o Transférer la vidéo au format .mov dans votre répertoire « mes devoirs »
- o Convertir le format en avi (codec xvid) avec FORMAT FACTORY
- o A l'aide de Virtual Dub, couper les séquences inutiles et supprimer la bande son.
- o Essayer d'ouvrir la video dans AVIMECA. Si celle-ci ne s'affiche pas, il faut retourner dans Virtual dub et changer le codec en choisissant un codec intel video

## 4- Pointages dans Avimeca

Ouvrir le fichier dans AVIMECA puis clip/adapter  
Etalonnage : faire défiler le film image par image et choisir la position d'équilibre du pendule comme origine des axes. Utiliser la règle sur le film pour l'échelle (en m)  
Effectuer le pointage des positions successives du centre d'inertie de la boule  
Exporter ensuite les mesures dans Excel (fichier/mesure/copier dans le presse papiers/le tableau )



## 5- Exploitation dans Excel

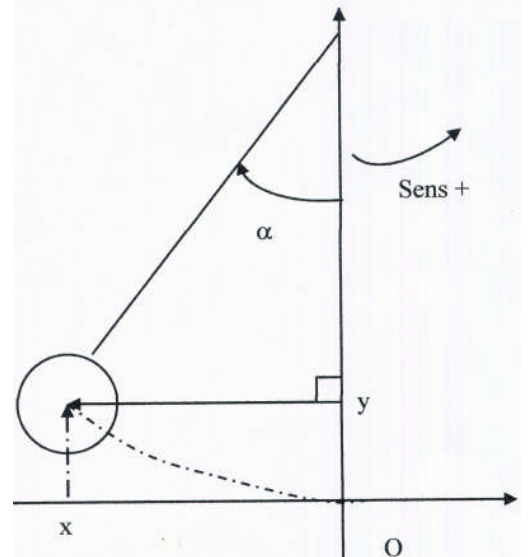
- Enregistrer immédiatement le fichier au format .xls (sinon il restera au format texte et les graphes seront perdus)
- Tracer x et y en fonction du temps
- Vérifie-t-on que le mouvement est périodique. Estimer grossièrement la valeur de la période T des oscillations du pendule.

### Modélisation :

Le mouvement du pendule peut être mieux décrit en fonction de la variation de l'angle  $\alpha$  au cours du temps avec

$$-\alpha_{\max} < \alpha < +\alpha_{\max}$$

- D'après le schéma, comment exprimer  $\sin \alpha$  en fonction de la longueur l du pendule et de la position x ?
- Faire une nouvelle colonne  $\sin \alpha$  et entrer la formule nécessaire pour remplir cette colonne
- Pour obtenir  $\alpha$  il suffit de créer une nouvelle colonne qui permettra d'obtenir  $\alpha$ . Il suffit d'utiliser la fonction ASIN. Le résultat sera en radians.
- Pour obtenir  $\alpha$  en degrés il faut ensuite utiliser la fonction DEGRES()
- Tracer ensuite  $\alpha = f(t)$
- Vérification :
- Noter l'amplitude maximum  $\alpha_{\max}$  et vérifier si elle est inférieure à  $20^\circ$



### Comparaison avec un modèle :

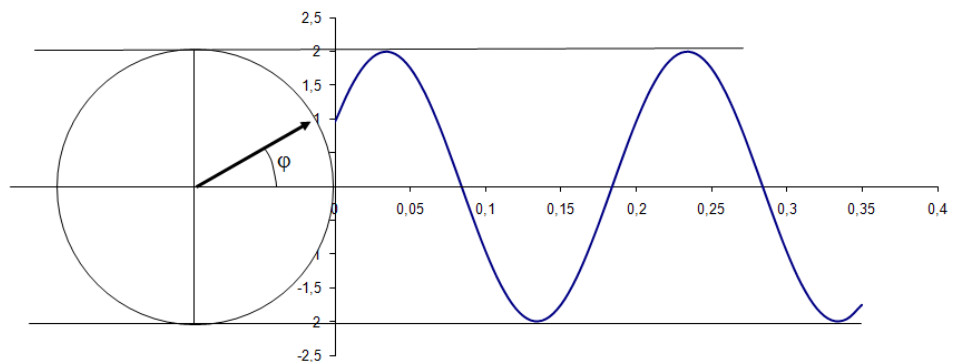
Le mouvement du pendule peut se modéliser par :

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \times \sin\left(\frac{2\pi}{T} \times t + \varphi\right)$$

- $\alpha(t)$  : angle à l'instant t
- $\alpha_{\max}$  : amplitude maximum de l'angle
- T : période des oscillations
- $\varphi$  : phase à l'origine

### Phase à l'origine

- Exprimer  $\alpha(t)$  pour  $t=0$ . En déduire l'expression de  $\sin \varphi$
- Par une mesure trouver  $\sin \varphi$  puis  $\varphi$



### Ajustement du

### modèle à l'expérience

- Créer 3 barres de défilement pour ajuster ensuite l'amplitude  $\alpha_{\max}$ , la période T et la phase  $\varphi$
- Ajouter une colonne  $\alpha_{\text{mod}}$  et entrer la formule nécessaire pour modéliser l'évolution de  $\alpha$  en veillant à utiliser les adresses absolues des 3 variables.
- Faire les réglages nécessaires pour que la courbe modélisée corresponde à la courbe de mesure

## 6- CONCLUSION

- Relever la valeur de la période T ainsi déterminer et trouver la valeur de g avec 3 chiffres significatifs.



# Mt

## Détermination de la masse de la TERRE

### 1- Résultats

- Calculer la masse de la Terre  $M_t$  à l'aide de vos valeurs personnelles de  $R_t$ ,  $g$  et  $G$
- Même chose avec les valeurs moyennes de tous les groupes
- Comparer avec la valeur trouvée dans Google

### 2- Détermination de $M_t$ par la 3<sup>è</sup> loi de KEPLER

Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est un foyer.  
Dans le référentiel héliocentrique, le Soleil occupe toujours l'un des deux foyers de la trajectoire elliptique des planètes qui gravitent autour de lui. À strictement parler, c'est le centre de masse qui occupe ce foyer. En 1618 Johannes KEPLER montra que le carré de la période sidérale  $T$  d'un objet (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe  $a$  de la trajectoire elliptique de la planète :  $\frac{T^2}{a^3} = k$  ( $k =$  constante).

Newton comprit le lien entre les lois de la mécanique classique et la troisième loi de Kepler. Il en déduit la formule suivante : où :

{	$T$ , période de l'objet ;
	$a$ , demi grand axe de la trajectoire elliptique ;
	$G$ , Constante gravitationnelle ;
	$M$ , masse de l'objet au centre.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Il existe un site de la NASA qui visualise en temps réel les positions des satellites tournant autour de la Terre.

Ouvrir ce site (voir page liens)

**Choisir un satellite quelconque dont l'orbite est bien elliptique, faire les mesures nécessaires pour déterminer la masse de la Terre.**

Remarques :

- L'orbite est dans le plan de la Terre lorsqu'il apparaît en rouge
- Menu option : on peut faire défiler le temps plus vite et choisir l'intervalle entre 2 mesures
- Menu view : pour afficher les caractéristiques du satellite ( altitude, période de révolution, etc..)

